

(1)

$$2x + 5y = 175 \Leftrightarrow 2x = 5(35 - y)$$

素因数の一意性より以下が成り立つ

$$x = 5n, y = 35 - 2n \quad (n: \text{自然数})$$

そして、 y : 自然数であることを考えると $35 - 2n > 0$ である必要があるから

$$n = 1, 2, \dots, 17 \text{ のみあり得る}$$

よって、 (x, y) の組は 17 個存在する

(2)

(1) より $x = 5n$ と表せるため、 x は n に対して単調増加すると考えられる

つまり、 x の小さい方から 7 番目は $n = 7$ の時だということ

$$\therefore (x, y) = (35, 21)$$

(3)

$$x = 5n, y = 35 - 2n \Rightarrow xy = 5n(35 - 2n)$$

よって、 $5n(35 - 2n)$ の ($n = 1, 2, \dots, 17$) での最大最小を考える

$$5n(35 - 2n) \Leftrightarrow -10 \left(n - \frac{35}{4} \right)^2 + 10 \left(\frac{35}{4} \right)^2$$

これを n についての 2 次関数と見ると $n = 9$ で最大値 $n = 17$ で最小値となる

$$\therefore \text{最大値} : 765 \quad (n = 9) \quad \text{最小値} : 85 \quad (n = 17)$$