白玉が n 回取り出されるときの確率をP_nとする

毎回球を戻すことからP_nには反復試行の考え方が適用できる

$$P_n = {}_{40}C_n \left(\frac{10}{70}\right)^n \left(\frac{60}{70}\right)^{40-n}$$
$$= \frac{40!}{n!\,(40-n)!}\frac{60^{40-n}10^n}{70^n}$$
$$= \frac{40!}{n!\,(40-n)!}\frac{60^{40-n}}{7^n}$$

ここでP_{n+1}とP_nの関係を考える

→定石として受験数学では$\frac{P_{n+1}}{P_n}$を考えるのが一般的

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{\frac{40!}{(n+1)!\,(39-n)!}\frac{60^{39-n}}{7^{40}}}{\frac{40!}{n!\,(40-n)!}\frac{60^{40-n}}{7^{40}}} = \frac{40-n}{n+1}\frac{1}{6}$$

上の式から$\frac{P_{n+1}}{P_n}$は n に対して単調減少(nが増えると$\frac{P_{n+1}}{P_n}$は減る)

つまり、$\frac{P_{n+1}}{P_n} < 1$に初めてなる n が題意を満たすn

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} < 1 \Leftrightarrow \frac{40-n}{n+1}\frac{1}{6} < 1 \Leftrightarrow 40-n < 6n+6 \Leftrightarrow 34 < 7n$$

$$\therefore n = 5$$