今回の問題は微分しないのがポイントです。微分を試みると計算地獄の罠にハマる泣

まず、題意の式をシンプルになるように式変形を試みます

$\dfrac{x^4+4x^3+4x^2+5}{x^2+2x+2}$の分子部分を$x^2+2x+2$で割れるか試すと

$$x^4+4x^3+4x^2+5-x^2(x^2+2x+2)=2x^3+2x^2+5$$

$$2x^3+2x^2+5-2x(x^2+2x+2)=-2x^2-4x+5$$

$$-2x^2-4x+5+2(x^2+2x+2)=9$$

$\therefore x^4+4x^3+4x^2+5=(x^2+2x+2)(x^2+2x-2)+9$となる…①

$$\therefore \frac{x^4+4x^3+4x^2+5}{x^2+2x+2}=\frac{(x^2+2x+2)(x^2+2x-2)+9}{x^2+2x+2}=x^2+2x-2+\frac{9}{x^2+2x+2}$$

ここで$x^2+2x-2+\frac{9}{x^2+2x+2}=x^2+2x+2+\frac{9}{x^2+2x+2}-4$…②とすると

$x^2+2x+2=(x+1)^2+1>0$ より

$x^2+2x+2+\dfrac{9}{x^2+2x+2}$に対して相加相乗平均が使える

よって

$$x^2+2x+2+\frac{9}{x^2+2x+2}\geq 2\sqrt{(x^2+2x+2)\frac{9}{x^2+2x+2}}=2\sqrt{9}=6$$

$x^2+2x+2=\frac{9}{x^2+2x+2}$（等号成立時）

$\Leftrightarrow (x^2+2x+2)^2=9$

$\Leftrightarrow x^2+2x+2=3\quad (\because x^2+2x+2=(x+1)^2+1>0)$

$\Leftrightarrow x^2+2x-1=0 \Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{2}$

また、② $\Leftrightarrow x^2+2x+2+\dfrac{9}{x^2+2x+2}-4\geq 6-4=2$

$\therefore x=-1\pm\sqrt{2}$で最小値 2