(1) 対偶を考える

対偶が真→命題が真…① を用いる。

S:even→n:even の対偶は n:odd→S:odd…②

n:odd の時 n=2k+1（k:非負整数）とおけるため

$$S=(2k)^2+(2k+1)^2+(2k+2)^2$$

となる。

mod2 で考えると

$$S\equiv 0^2+1^2+0^2\equiv 1\ (mod2)$$

より、S:odd となる。

よって、②が示せたため①より題意の命題が示せた。

(2) 連続する整数の積を用いる
(1) より、n=2k（k:非負整数）とおける。

つまり、$S=(2k-1)^2+(2k)^2+(2k+1)^1=24k^3+12k$ となる。

$$S=24k^3+12k$$

$$=12(2k^3+k)$$

$$=12\{2(k^3-k)+3k\}$$

$$=12\{2(k-1)k(k+1)+3k\}\cdots③$$

ここで、(k-1)k(k+1)は連続した 3 の整数の積であるから

k-1,k,k+1 のどれかは 2 の約数を持っていて、どれかは 3 の約数を持っている。

つまり、(k-1)k(k+1)は 2 と 3 の約数を持っているから 6 の約数を持っている。

よって

$$(k-1)k(k+1)\equiv 0\ (mod6)$$

$$\therefore (k-1)k(k+1)=6m\ (m\text{:整数})$$

とできるため、③は以下のように変形できる。

$$③ \Leftrightarrow 12(6m+3k) \Leftrightarrow 72m+36k \Leftrightarrow 36(2m+k) \Leftrightarrow 36r\ (r: \text{整数})$$

$$\therefore S = 36r \equiv 0\ (mod 36)$$

よって、S:36 の倍数となるため題意は示された。