$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\dots(k+m) = \frac{1}{m+2} n(n+1)\dots(n+m+1)$$ の証明

(m, n: 自然数)

$a_k = k(k+1)\dots(k+m+1)$ と定義する

そして、$a_k - a_{k-1}$ を計算すると

$$a_k - a_{k-1} = k(k+1)\dots(k+m+1) - (k-1)k\dots(k+m)$$

$$= \{(k+m+1) - (k-1)\}k(k+1)\dots(k+m)$$

$$= (m+2)k(k+1)\dots(k+m)$$

$$\therefore k(k+1)\dots(k+m) = \frac{1}{m+2}(a_k - a_{k-1})$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} k(k+1)\dots(k+m) = \frac{1}{m+2}\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = \frac{1}{m+2}(a_n - a_0)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} k(k+1)\dots(k+m) = \frac{1}{m+2} n(n+1)\dots(n+m+1)$$

$(\because a_n = (n+1)\dots(n+m+1),\ a_0 = 0)$

よって題意は示された