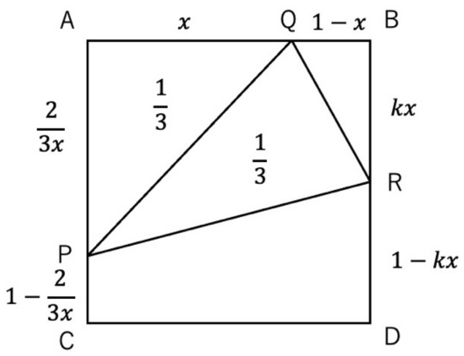

$\mathrm{AQ}=\mathrm{x}, \mathrm{DR}=\mathrm{kx}$と置く。
$(0<x\leq 1\wedge \mathrm{k}>0)$

△APQ の面積：$\frac{1}{3}$ より

$\frac{1}{2}\times \mathrm{AP}\times \mathrm{x}=\frac{1}{3}$ であるから$\mathrm{AP}=\frac{2}{3x}$

また$0<\mathrm{AP}\leq 1$ より$\frac{2}{3}\leq x\leq 1$

$\therefore \mathrm{BP}=1-\frac{2}{3x}$ $\mathrm{CR}=1-\mathrm{kx}$ $\mathrm{QD}=1-\mathrm{x}$

そして、四角形 ABCD の面積が 1 であることから

△QDR と四角形 PBCR の面積の和は $\frac{1}{3}$ である。

$$\therefore \frac{1}{2}kx(1-x)+\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{2}{3x}\right)+(1-kx)\right\}\times 1=\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow kx^2=\frac{4}{3}-\frac{2}{3x}$$

$$\Leftrightarrow k=\frac{4}{3x^2}-\frac{2}{3x^3}$$

ここで、$\mathrm{t}=\frac{1}{x}$ とすると

$$1\leq t\leq \frac{3}{2}, k=\frac{4}{3}t^2-\frac{2}{3}t^3$$

となるから、$1\leq t\leq \frac{3}{2}$ で

$$\begin{cases} y=-\dfrac{2t^3}{3}+\dfrac{4t^2}{3} \\ y=k \end{cases}$$

が共有点を持つような k を求めれば良い。

$$f(t) = -\frac{2t^3}{3} + \frac{4t^2}{3}$$

とすると

$$f'(t) = -2t^2 + \frac{8}{3}t = -2t(t - \frac{4}{3})$$

より、$f(t)$の増減表は以下の通り

t	1		$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$\frac{2}{3}$	↗	$\frac{64}{81}$	↘	$\frac{3}{4}$

この表より、$f(t)$の値域は $\frac{2}{3} \leq f(t) \leq \frac{64}{81}$ となる。

よって、$\frac{DR}{AQ}$ の最大値は$\frac{64}{81}$、最小値は$\frac{2}{3}$ となる。