この問題ではコーシーシュワルツの不等式を用いる

コーシーシュワルツの不等式

x, y, z, a, b, c：実数

$$(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$$

等号成立時 $(a : b : c = x : y : z)$

今回は未知数がx, yの 2 つであるからコーシーシュワルツの不等式を 2 次で考える。

$$(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \cdots ①$$

等号成立時 $(a : b = x : y)$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \frac{1}{2}\sqrt{2x} + \sqrt{y}$$

とすると、①より以下の不等式が成立する(①において$a = \frac{1}{2}, b = 1, x = \sqrt{2x}, y = \sqrt{y}$)

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2x} + \sqrt{y}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{2} + 1\right)(2x + y) = \frac{3}{2}(2x + y) \quad \cdots (\mathrm{i})$$

$$\text{等号成立時} \quad \sqrt{2x} : \sqrt{y} = \frac{1}{\sqrt{2}} : 1 \Rightarrow y = 4x$$

ここで、$\sqrt{x} + \sqrt{y} > 0,\ 2x + y > 0$を考えると

$$(\mathrm{i}) \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{2x + y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{2x + y}} \leq \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{2x + y}} \leq k \text{が任意の} x, y \text{に対し成立するには、} \frac{\sqrt{6}}{2} \leq k \text{が必要}$$

$$\therefore k \text{の最小値は} \frac{\sqrt{6}}{2}$$

[参考]

コーシーシュワルツの不等式

$$x, y, z, a, b, c$$：実数

$$(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$$

証明

$\vec{a} = (a, b, c)$と $\vec{x} = (x, y, z)$のなす角をθ $(0 \leq \theta \leq \pi)$とする

すると以下が成立する

$$(\vec{a} \cdot \vec{x})^2 = |\vec{a}|^2|\vec{x}|^2(\cos\theta)^2 \leq |\vec{a}|^2|\vec{x}|^2 \ (\because 0 \leq \cos\theta \leq 1)$$

$$\Leftrightarrow (\vec{a} \cdot \vec{x})^2 \leq |\vec{a}|^2|\vec{x}|^2$$

$$\Leftrightarrow (ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + c^2)$$

∴ 題意は示された