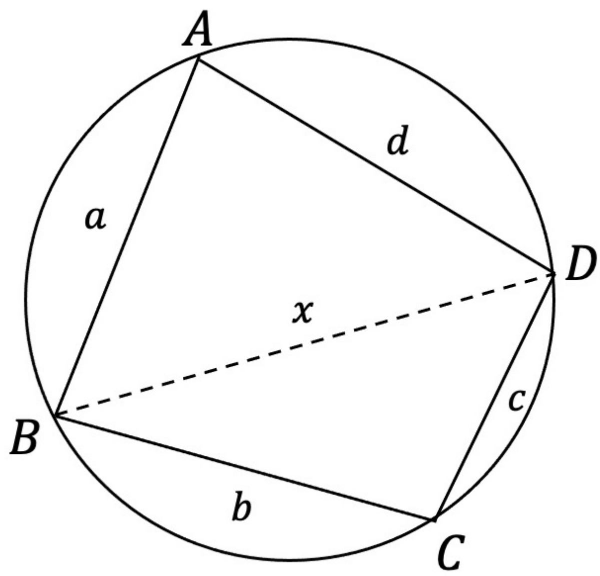

今回の問題は公式の証明

ブラーマグプタの公式

この公式はヘロンの公式の発展版と考えることができ、実際に受験やテストの多くの場面で活用できる強力な公式。特徴としては、円に内接する四角形の面積はどの角度を考えなくても一つの式で算出できてしまうところ。

最後に**重要な考え方**も載せているのでぜひご覧ください。

証明

方針

$$S=\sqrt{\left(\frac{b+c+d-a}{2}\right)\left(\frac{a-b+c+d}{2}\right)\left(\frac{a+b-c+d}{2}\right)\left(\frac{a+b+c-d}{2}\right)}$$

のままで考えるのはあまりにも考えづらいため以下のように簡単にする

$$16S^2=(b+c+d-a)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)$$

実際の手順

上図のようにa,b,c,dを定める

そして、$BD=x$として考える

余弦定理より以下が成立する

$$x^2=a^2+d^2-2ad\cos A\text{、}x^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$\therefore a^2+d^2-2ad\cos A=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$\Leftrightarrow a^2-b^2-c^2+d^2=2(ad+bc)\cos A$$

$$\therefore \cos A = \frac{a^2-b^2-c^2+d^2}{2(ad+bc)} \cdots ①$$

また$S=\triangle ABD$の面積$+\triangle CBD$の面積で

$\triangle ABD$の面積$=\dfrac{1}{2}ad\sin A$、$\triangle CBD$の面積$=\dfrac{1}{2}bc\sin(\pi - A)$

$$\therefore S = \frac{1}{2}ad\sin A + \frac{1}{2}bc\sin(\pi - A) \Leftrightarrow S = \frac{1}{2}ad\sin A + \frac{1}{2}bc\sin A$$

ここで方針に近づくため$16S^2$を考える

$$\therefore 16S = 4ad\sin A + 4bc\sin A$$

$$\Rightarrow 16S^2 = (4ad\sin A + 4bc\sin A)\left(\frac{1}{2}ad\sin A + \frac{1}{2}bc\sin A\right)$$

$$\Leftrightarrow 2a^2d^2(\sin A)^2 + 4adbc(\sin A)^2 + 2b^2c^2(\sin A)^2 = 16S^2$$

$$\Leftrightarrow (\sin A)^2(2a^2d^2 + 4adbc + 2b^2c^2) = 16S^2$$

$$\Leftrightarrow \{1 - (\cos A)^2\}(2a^2d^2 + 4adbc + 2b^2c^2) = 16S^2$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos A)(1 + \cos A)(2a^2d^2 + 4adbc + 2b^2c^2) = 16S^2$$

ここで、①を代入すると

$$\left(1 - \frac{a^2-b^2-c^2+d^2}{2(ad+bc)}\right)\left(1 + \frac{a^2-b^2-c^2+d^2}{2(ad+bc)}\right)(2a^2d^2 + 4adbc + 2b^2c^2) = 16S^2$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{a^2-b^2-c^2+d^2}{2(ad+bc)}\right)\left(1 + \frac{a^2-b^2-c^2+d^2}{2(ad+bc)}\right)\{2(ad+bc)^2\} = 16S^2$$

$$\Leftrightarrow \{2(ad+bc) - (a^2-b^2-c^2+d^2)\}\{2(ad+bc) + (a^2-b^2-c^2+d^2)\} = 16S^2$$

$$\Leftrightarrow \{b^2+2bc+c^2-(a^2-2ad+d^2)\}\{a^2+2ad+d^2-(b^2-2bc+c^2)\} = 16S^2$$

$$\Leftrightarrow \{(b+c)^2-(a-d)^2\}\{(a+d)^2-(b-c)^2\} = 16S^2$$

$$\Leftrightarrow \{b+c-(a-d)\}\{b+c+(a-d)\}\{a+d-(b-c)\}\{a+d+(b-c)\} = 16S^2$$

$$\Leftrightarrow (b+c+a-d)(b+c-a+d)(a+d-b+c)(a+d+b-c) = 16S^2$$

よって方針が証明できたため、題意の証明できた

[考え方]

今回の証明の一番難しいところはなんと言っても最初の第一歩です。

題意だけ見て最初から$BD = x$と置き、$\cos A = \frac{a^2-b^2-c^2+d^2}{2(ad+bc)}$を出しておいて、

その後$S =\Delta ABD$の面積$+\Delta CBD$の面積の計算を進める時に$\cos A$の式を使うと思いつく人は、まあ宇宙人くらいしかいないでしょう。

しかし、実際にこの問題をヒントなしで解ける人がいるのも事実です。それには以下のようなカラクリが存在します。

（最後に勉強における最重要ポイントを書いているのでぜひご覧ください）

STEP1

「今回の公式は四角形の面積についての問題である

→面積を式で表しその式が公式に一致することを証明することができれば良いのでは？」

この考え方ができる人は一旦はまず与えられた条件から S の式を立てようとします。

STEP2

「四角形の面積を求める場合我々の手段は「底辺×高さ」or「三角形の足し合わせ」のみ

→底辺や高さがわからないから「三角形の足し合わせ」を使おう」

(ここで最も重要な点は、求めたい値を算出する方法は何種類あるかを考えるところ。数学において手が動かない状況とは、単に問題に威圧に押し潰され怖気付いている状況です。そもそも、問題として出ているのだから絶対に知っている情報だけで解けるようになっています。なのでなんでもいいので計算をとりあえず行うことがとても重要です。)

この考え方をできる人は ABCD を BD or AC で分けようとします。(どちらで分けても可)

STEP3

「三角形の面積の出し方は「底辺×高さ×$\frac{1}{2}$」or「sin を用いる公式」のみ

→底辺や高さがわからないから「sin を用いる公式」を使おう」

STEP2 ができる人はこの STEP も難なくクリアするでしょう。

ここまでで$S =\Delta ABD$の面積$+\Delta CBD$の面積の式が立ちます

STEP4

「$S=\triangle ABD$の面積$+\triangle CBD$の面積を立てたが、式の中に角度を用いている

→公式では角度は出てこないため角度を消したい

ここで言っている角度とは sin で用いている角 A のことです。この考え方をできる人は sinA をどうにかして a,b,c,d のみで表せないか考えます

STEP5

「sinA を a,b,c,d で表したい

→sinA を直接 a,b,c,d で表すことがは難しいため cosA を a,b,c,d で表せないか？」

sinA を直接 a,b,c,d で表そうとしてもかなり難しいのでほとんどの人はまずできません。なので、代用として cosA を a,b,c,d で表せないか考えます

STEP6

「cosA と a,b,c,d を繋ぐ公式は余弦定理しかない

→四角形の対角線の長さをxと置いて余弦定理を立てれば良いのでは？」

この考え方は難しそうに見えて実は最初の四角形を 2 つの三角形に分けているので比較的思いつきやすいです。この考え方をできる人は余弦定理の式が 2 種類作れます。

STEP7

「xは勝手に作った文字だから消去したい

→2 種類の余弦定理を引き算してxを消せば良いのでは？」

この考え方ができて初めて、今回の証明の最初に登場した cosA の式が作れます。

あとは計算していけばいつの間にか証明が完成していることでしょう。

ここまで読んでくださった皆さんへ

我々がこの問題を通して皆さんに伝えたいことは

「問題集の答えは見やすく整えられており、学力向上に対してはなんの意味も持たない」

ということです。

我々はこの証明をいきなり cosA の式を作ってから始めました。しかし、誰がこんなこと

を思いつくでしょうか？

問題を解くには毎回いくつかの STEP を踏んで解答に近づいていきます。しかし、問題集の答えはどれも解答がわかっている上で書いています。それでは、自分はどこの STEP まで進めていて、どこからが解けていないのかがわからなくなり、勉強において一番重要な「なぜ解けないのか？」を何も理解できません。

けれど、このポイントを理解している人は問題集の解答を見るのに何十分もかけていて、確実に学力向上しています。そして、我々は DAI DAI support の生徒皆さんにも確実に学力向上をしてもらいたいのです。

なので、これから問題集の答えの見方を変え**効率的に学力向上**していきましょう！