$$x > 0 \land y > 0 \text{①}$$

$$\frac{k}{x+y} \leq \frac{1}{x} + \frac{49}{y} \Leftrightarrow k \leq (x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{49}{y}\right) \text{②}$$

②の右辺の最小値をmとすると、②が常に成り立つための条件は

$$k \leq m$$

$\Longrightarrow k$の最大値はmである

$$(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{49}{y}\right) = 1 + \frac{49x}{y} + \frac{y}{x} + 49$$

$$= 50 + \left(\frac{49x}{y} + \frac{y}{x}\right) \geq 50 + 2\sqrt{\frac{49x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 64$$

$\left(\because \text{①より} \frac{49x}{y} > 0 \land \frac{y}{x} > 0 \text{ だから、相加・相乗の関係を用いた}\right)$

この時の等号成立条件は$\frac{49x}{y} = \frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{y}{x} = 7$ であり、$m = 64$ となる

$\Longrightarrow k$の最大値は 64 である