



$$f(a) = f(b)$$

とは左図のような状況であるから

$$0 < a < 1 < b \text{ ①}$$

であることがわかる

$$f(a) = f(b) \Leftrightarrow -\log_{10} a = \log_{10} b$$

$$\Leftrightarrow \log_{10} ab = 0$$

$$\Leftrightarrow ab = 10^0 = 1 \text{ ②}$$

また相加・相乗平均の大小関係から

$$\frac{1}{2}(a+b) \geq \sqrt{ab} = 1 (\because \text{②})$$

$$\text{追加で } f(b) = 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \Leftrightarrow \log_{10} b = 2 \log_{10} \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow b = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \text{ ③}$$

上記より、①②③を同時に満たせば良いことがわかる

$\therefore a, b$ の関係は

$$b = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \wedge ab = 1 (0 < a < 1 < b)$$

これを解くと

$$\left(b + \frac{1}{b}\right)^2 = 4b (b > 1)$$

$$g(b) = \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 - 4b (b > 1) \text{ とすると}$$

$g(b)$ は $b > 1$ で連続であり、 $g(3) < 0 \wedge g(4) > 0$ であるから

中間値の定理より $g(b) = 0$ を満たす b が $3 < b < 4$ で存在することがわかる