(1)$P(x)$は実数係数であるため

ある複素数sが$P(x)=0$の解である時その共役な複素数$\bar{s}$も$P(x)=0$の解となる

$\therefore r=1+\sqrt{3}i$が$P(x)=0$の解である時、$1-\sqrt{3}i$も解となる

$\Longrightarrow$ $P(x)$は$\left\{x-\left(1+\sqrt{3}i\right)\right\}\left\{x-\left(1-\sqrt{3}i\right)\right\}$で割り切れる

実際に$P(x)$を$\left\{x-\left(1+\sqrt{3}i\right)\right\}\left\{x-\left(1-\sqrt{3}i\right)\right\}$で割ってみると

商:$x^2+(a+2)x+2a+b$、余り:$\left\{2b-8\left(\sqrt{3}+2\right)\right\}x-4(2a+b)+16$

となり余り$=0$となれば「$P(x)$は$\left\{x-\left(1+\sqrt{3}i\right)\right\}\left\{x-\left(1-\sqrt{3}i\right)\right\}$で割り切れる」となる

$$\therefore \left\{2b-8\left(\sqrt{3}+2\right)\right\}x-4(2a+b)+16=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2b-8\left(\sqrt{3}+2\right)=0 \\ -4(2a+b)+16=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4(\sqrt{3+2)} \\ a=-2\sqrt{3}-2 \end{cases}$$

(2)(1)から

$$P(x)=\left\{x-\left(1+\sqrt{3}i\right)\right\}\left\{x-\left(1-\sqrt{3}i\right)\right\}(x^2+(a+2)x+2a+b)$$

$$\Leftrightarrow P(x)=\left\{x-\left(1+\sqrt{3}i\right)\right\}\left\{x-\left(1-\sqrt{3}i\right)\right\}\left(x^2-2\sqrt{3}x+4\right)$$

となり、$1-\sqrt{3}i$と$x^2-2\sqrt{3}x+4=0$の解が題意を満たす解であることがわかる

$$\therefore x^2-2\sqrt{3}x+4=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{3}\pm i$$

よって求める解は$1-\sqrt{3}i, \sqrt{3}\pm i$