

(1)

$$\frac{2}{3-\sqrt{8}} = \frac{2(3+\sqrt{8})}{(3-\sqrt{8})(3+\sqrt{8})} = \frac{6+2\sqrt{8}}{9-8} = 6+2\sqrt{8} = 6+4\sqrt{2}$$

ここで $\sqrt{2} \approx 1.414$ であることを考えると $4\sqrt{2} \approx 5.7 \Rightarrow 6+4\sqrt{2} \approx 11.7$ となるため

$a = 11$ となる。そして $6+4\sqrt{2}-a = b$ であるから $b = 4\sqrt{2}-5$ となる

(ちなみに、 $a < 6+4\sqrt{2} < a+1$ とおき厳密に解く方法もある)

(2)

$$a^2 + b^2 + 2ab - 12a - 12b + 36 = (a+b)^2 - 12(a+b) + 36 = \{(a+b) - 6\}^2$$

そして $a+b = 6+4\sqrt{2}$ であるから

$$\{(a+b) - 6\}^2 = (4\sqrt{2})^2 = 32$$

(3)

$$\begin{aligned} b - \frac{7}{b} &= 4\sqrt{2} - 5 - \frac{7}{4\sqrt{2} - 5} \\ &= 4\sqrt{2} - 5 - \frac{7(4\sqrt{2} + 5)}{(4\sqrt{2} - 5)(4\sqrt{2} + 5)} \\ &= 4\sqrt{2} - 5 - \frac{7(4\sqrt{2} + 5)}{32 - 25} = 4\sqrt{2} - 5 - (4\sqrt{2} + 5) \\ &= -10 \end{aligned}$$

(4)

$$b^2 + b - 14 - \frac{7}{b} + \frac{49}{b^2} = b^2 - 14 + \frac{49}{b^2} + b - \frac{7}{b} = \left(b - \frac{7}{b}\right)^2 + \left(b - \frac{7}{b}\right) = (-10)^2 - 10 = 90$$

最後の $b^2 - 14 + \frac{49}{b^2} = \left(b - \frac{7}{b}\right)^2$ を思いつかない人が多いですが、(3)から明らかに $b - \frac{7}{b}$

を使うとわかるので、無理やり $b - \frac{7}{b}$ で括ろうとすれば一歩正解に近づくでしょう。