まず、関数$f(x)$が$x=\alpha(\alpha$：実数$)$で微分可能の意味を考える

$f(x)$が$x=a$で微分可能 $\Leftrightarrow f'(a)$が存在する

つまり、$f(x)$が$x=1$で微分可能は$f'(1)$が存在していれば良い

$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$の左辺の極限値が存在すれば良い

また、$h<0 \vee h>0$で$f(1+h)$の式が異なるため

$h\to 0+0$と$h\to 0-0$の両方で極限値が存在し、一致すればいい

解答

$x=1$で$f(x)$は連続である必要があるから$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$が成立

$$\therefore \lim_{x\to 1-0}(x^2+ax+b)=f(1)=0 \text{ となる}$$

$$\therefore 1+a+b=0 \cdots ①$$

この時

$$\lim_{h\to 0+0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0+0}\frac{1}{h}\left\{\frac{\log(1+h)}{1+h}-0\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0+0}\frac{1}{1+h}\frac{\log(1+h)}{h}=1\ \left(\because \lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)}{h}=1\right)$$

また

$$\lim_{h\to 0-0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0-0}\frac{(1+h)^2+a(1+h)+b}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0-0}\frac{h^2+(a+2)h+b+1}{h}=\lim_{h\to 0-0}(h+a+2)=a+2\ \ (\because ①)$$

$$\therefore a+2=1 \text{ であれば良いことがわかる} \Longrightarrow a=-1, b=0$$