区分求積法：$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$ を用いる

（1）

$$与式=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{4n^2-k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}\ とできる$$

つまり、$f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$ とすれば区分求積法が使える

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{dx}{4-x^2}$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1\left(\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2+x}\right)dx=\frac{1}{4}[-\log(2-x)+\log(2+x)]_0^1=\frac{1}{4}\log 3$$

（2）

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+2k}{n^2+nk+k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2+2nk}{n^2+nk+k^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1+2\left(\frac{k}{n}\right)}{1+\frac{k}{n}+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx=\int_0^1\frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}dx$$

$$=[\log(x^2+x+1)]_0^1=\log 3$$