(1)

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}、\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}、\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{CA}\right|\text{より}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|^2=\left|\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}\right|^2$$

$$\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=\left|\overrightarrow{CD}\right|^2+2\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DA}+\left|\overrightarrow{DA}\right|^2$$

$$\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=\left|\overrightarrow{CD}\right|^2+\left|\overrightarrow{DA}\right|^2①$$

$$\left(\because \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DA}\right)$$

(2)

$$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}、\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}、\left|\overrightarrow{DB}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|\text{より}$$

$$\left|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right|^2$$

$$\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{DA}\right|^2+2\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AB}+\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|\overrightarrow{BC}\right|^2+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}+\left|\overrightarrow{CD}\right|^2$$

$$\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{DA}\right|^2+\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|\overrightarrow{BC}\right|^2+\left|\overrightarrow{CD}\right|^2②$$

$$\left(\because \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}\right)$$

$$①+②\text{より}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2+\left|\overrightarrow{DA}\right|^2+\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|\overrightarrow{CD}\right|^2+\left|\overrightarrow{DA}\right|^2+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2+\left|\overrightarrow{CD}\right|^2$$

$$\Leftrightarrow 2\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=2\left|\overrightarrow{CD}\right|^2$$

$$\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right|③$$

(3)

$$①-②\text{より}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2-\left|\overrightarrow{DA}\right|^2-\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|\overrightarrow{CD}\right|^2+\left|\overrightarrow{DA}\right|^2-\left|\overrightarrow{BC}\right|^2-\left|\overrightarrow{CD}\right|^2$$

$$\Leftrightarrow 2\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=2\left|\overrightarrow{DA}\right|^2$$

$$\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right| ④$$

③、④より向かい合う辺の長さが互いに等しいから四角形$ABCD$は平行四辺形

$$\therefore \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$$

これを$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD}$に代入すると

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} \cdot \left(-\overrightarrow{AB}\right)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$$