${}_pC_k = \dfrac{p(p-1)\ldots\{p-(k-1)\}}{k(k-1)\ldots 2\cdot 1}$と表せ、これが$p$で割り切れることを示す

$\Rightarrow \dfrac{{}_pC_k}{p}$：整数であることを示せば良い

$\Leftrightarrow \dfrac{{}_pC_k}{p} = \dfrac{(p-1)\ldots\{p-(k-1)\}}{k(k-1)\ldots 2\cdot 1}$：整数であることを示せば良い

ここで ${}_nC_m$：整数$(m = 0,1,2 \ldots n)$が常に成り立つことを利用する

<u>証明</u>

数学的帰納法で示す

$n = 1$ の時 ${}_1C_0 = {}_1C_1 = 1$ より成立

$n = k$の時成立すると仮定する

$n = k + 1$ の時$m = 1,2,\ldots k$において以下の公式が成立する

$${}_{k+1}C_m = {}_kC_{m-1} + {}_kC_m$$

(この公式の証明は極上シリーズの$No.13(2)$に掲載してあります)

この公式において ${}_kC_{m-1}$ と ${}_kC_m$は仮定より整数であるから${}_{k+1}C_m$も整数

また、$m = 0, k+1$ の時は${}_{k+1}C_0 = {}_{k+1}C_{k+1} = 1$ より成立

$\therefore m = 0,1,2 \ldots k+1$ において${}_{k+1}C_m$が整数であることが言えたため

題意は証明された

この ${}_nC_m$：整数$(m = 0,1,2 \ldots n)$である公式を用いると

$\dfrac{p(p-1)\ldots\{p-(k-1)\}}{k(k-1)\ldots 2\cdot 1}$：整数であることがわかる

しかしp: 素数であることからpを割り切れる数字は 1 とpのみであり

題意の条件より$k < p$であるため

$k, k-1, \ldots 2$ は全てpを割り切れないこととなるが

$\dfrac{p(p-1)\ldots\{p-(k-1)\}}{k(k-1)\ldots 2\cdot 1}$：整数であるから

$p(p-1)\ldots\{p-(k-1)\}$は$k(k-1)\ldots2\cdot1$で割り切れる必要がある

$\therefore (p-1)\ldots\{p-(k-1)\}$が$k(k-1)\ldots2\cdot1$で割り切れるということになる

$\Longrightarrow \dfrac{(p-1)\ldots\{p-(k-1)\}}{k(k-1)\ldots2\cdot1}$: 整数となることがわかり $\dfrac{{}_pC_k}{p}$: 整数となるため

題意は示された