ド・モアブルの定理

定理の内容

ド・モアブルの定理は、複素数の極形式を使って、複素数の累乗を簡単に計算する方法を提供します。

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

ここで、n は整数であり、$\cos\theta + i\sin\theta$ は複素数を極形式で表したものです。

証明（帰納法による証明）

n = 1 の場合：

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^1 = \cos\theta + i\sin\theta$$

よって成立。

n = k のときに

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^k = \cos k\theta + i\sin k\theta$$

が成り立つと仮定。

次に n = k + 1 の場合を考えます：

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{k+1} = (\cos\theta + i\sin\theta)^k(\cos\theta + i\sin\theta)$$

仮定を代入して計算すると：

$$(\cos k\theta + i\sin k\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)$$

これを分配法則で展開すると：

[cos(kθ)cosθ - sin(kθ)sinθ] + i[cos(kθ)sinθ + sin(kθ)cosθ]

$$(\cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta) + i(\cos k\theta\sin\theta + \sin k\theta\cos\theta)$$

三角関数の加法定理を用いると：

$$\cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta$$

よって、帰納法により証明完了

数学的な意味

ド・モアブルの定理は、複素数と三角関数の間の深い関係を示しています。具体的には、以下のような意味を持ちます：

1. 複素数の回転と拡大を表現
  - 複素数 (cosθ + i sinθ) を n 回掛けることは、複素平面上でその角度を nθ に拡張する操作に対応します。
  - これは幾何学的に、複素平面上で点を回転させる操作を簡潔に記述する方法です。

2. 三角関数の累乗の簡略化
  - 三角関数の複雑な累乗の計算を、単一の角度の変換として簡単に表現できます。

3. 複素数の性質の一般化
  - 実数の累乗は正負方向への変化ですが、複素数の累乗は平面上での回転と拡大を組み合わせた変換になります。この視点を提供するのがド・モアブルの定理です。

有用なポイント

1. 複素数の累乗計算
  - 複雑な形の複素数を累乗する際に、ド・モアブルの定理を用いることで計算が非常に簡略化されます。

2. 三角関数の積分や級数計算
  - 三角関数の公式や積分の計算において、累乗や指数を簡略化するのに役立ちます。

3. 根を求める計算
  - 複素数の n 乗根を求める際、ド・モアブルの定理を利用します。たとえば、$z^n = 1$ の解（単位円上の n 個の点）を求めるときに有効です。

4. フーリエ変換や波動解析
  - 物理学や工学では、複素指数関数と三角関数を頻繁に変換します。この際に、ド・モアブルの定理を用いることで解析が容易になります。